На правах рукописи

Чеботарева Эльвира Валерьевна

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа Татарского государственного гуманитарно–педагогического университета.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Мухлисов Фоат Габдуллович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Сабитов Камиль Басирович,

доктор физико–математических наук, профессор Чугунов Владимир Аркадьевич

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита диссертации состоится 30 сентября 2010 года в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан "____" августа 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Вырождающиеся и сингулярные эллиптические уравнения занимают важное место в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они находят широкое применение при решении многих задач прикладного характера, в их числе задачи газовой динамики, теории оболочек, теории упругости, механики сплошной среды. Краевые задачи для таких уравнений обладают той особенностью, что иногда на границе области, где происходит вырождение, граничное условие не ставится или граничное условие ставится с некоторой весовой функцией.

Уравнения эллиптического типа, по одной или нескольким переменным которых действует оператор Бесселя

$$B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x},\ k > 0$$

и их решения ищутся в классе четных по этим переменным функций, И.А. Киприяновым были названы B–эллиптическими.

В первых работах по B–эллиптическим уравнениям рассматривалось уравнение вида

$$\Delta_B u = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_{x_p} u. \tag{1}$$

И.А. Киприянов создал теорию весовых пространств, которая впоследствии была применена к изучению краевых задач для B–эллиптических уравнений с граничными условиями на нехарактеристической части границы. На характеристической части ставились однородные условия типа условий четности.

Н.Р. Раджабов построил поверхностные потенциалы простого и двойного слоев и применил их к исследованию краевых задач для уравнения (1) при условиях, когда нехарактеристическая часть границы есть поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. А.Ю. Сазонов обобщил данные результаты на общие линейные B–эллиптические уравнения с переменными коэффициентами при тех же ограничениях на нехарактеристическую часть границы области.

А.Ш. Хисматуллин исследовал основные краевые задачи для следующих вырождающихся B–эллиптических уравнений

$$y^m B_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ m > 0,\ y \geq 0,$$

$$B_x u + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ m > 0,\ y \geq 0,$$

$$B_x u + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,\ 0 < \alpha < 1,\ y \geq 0.$$

Вопросы о существовании и единственности решений основных краевых задач для многомерных вырождающихся B–эллиптических уравнений до последнего времени оставались открытыми.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач для многомерных вырождающихся B–эллиптических уравнений

$$L_B[u(x)] = x_p^m \left(\sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} = 0, \tag{2}$$

где $m > 0$, $p \geq 3$;

$$E_{\alpha B}\left[u(x)\right] = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_{x_{p-1}} u + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p}\right) = 0, \tag{3}$$

где $0 < \alpha < 1$, $p \geq 3$;

$$E_B\left[u(x)\right] = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_{x_{p-1}} u + x_p^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} = 0, \tag{4}$$

где $m > 4$, $p \geq 3$;

$$T_B\left[u(x)\right] = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + B_{x_{p-1}} u + x_p^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p}\right) = 0, \tag{5}$$

где $0 < \alpha < 1$, $p \geq 3$.

Цель работы. Постановка краевых задач для уравнений (2)—(5) и доказательство существования их единственного решения.

Методы исследования. Применяются методы классической теории потенциала, теории функций действительной переменной, дифференциальных и интегральных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Построены фундаментальные решения вырождающихся многомерных B–эллиптических уравнений (2)—(5).

2. Изучены основные свойства решений вышеуказанных уравнений, в частности, принцип максимума и их поведение при $x_p \to 0$.
3. Даны постановки краевых задач для вышеуказанных уравнений и доказаны теоремы о единственности их решения.
4. Построены потенциалы простого и двойного слоев и исследованы их основные свойства, в частности, доказаны теоремы о предельных значениях потенциалов двойного слоя и конормальной производной потенциалов простого слоя на границе области.
5. Доказаны теоремы о существовании решения краевых задач для вышеуказанных уравнений методом потенциалов.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для некоторых вырождающихся B–эллиптических уравнений, а также найти приложение в осесимметрических задачах теории потенциала, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно–педагогического университета (руководитель — профессор Мухлисов Ф.Г.). Основные результаты работы докладывались на Седьмой Международной конференции "Актуальные проблемы современной науки" (Самара, 2006), Восьмой международной Казанской летней научной школе–конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2007), Шестой Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2009), Десятой международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2009), Второй Всероссийской научно-практической конференции, посвященной памяти В.Ф. Волкодавова (Самара, 2009), научно-практических итоговых конференциях при кафедре математического анализа Татарского государственного гуманитарно–педагогического университета.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах автора [1]–[11].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 29 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации составляет 133 страницы. Список литературы содержит 59 наименований.

Краткое содержание работы

Во *введении* дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко излагаются основные результаты диссертации.

Пусть E_p^{++} — часть $x_p > 0$, $x_{p-1} > 0$ p–мерного евклидова пространства точек; Ω — конечная область в E_p^{++}, ограниченная гиперповерхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 гиперплоскостей $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ соответственно; $\Omega_e = E_p^{++} \backslash (\Omega \cup \Gamma)$; $C_B^k(\ )$ — множество функций из класса $C^k(\ )$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_{p-1}} = o(1) \text{ при } x_{p-1} \to 0.$$

В *первой главе* доказывается существование единственного решения основных краевых задач для вырождающегося B–эллиптического уравнения первого рода (2).

В §1 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора L_B.

В §2 строится фундаментальное решение уравнения (2).

В §3 дается интегральное представление решения уравнения (2).

В §4 изучаются некоторые свойства решений уравнения (2), в том числе доказывается теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения (2) и доказывается единственность их решений. Ставятся следующие краевые задачи.

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$L_B\left[u(x)\right] = 0,\ x \in \Omega,$$

$$u\left(x\right) = o\left(1\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u|_\Gamma = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C\left(\Gamma\right).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega_e) \cap C\left(\overline{\Omega}_e\right),$$

$$L_B\left[u(x)\right] = 0,\ x \in \Omega_e,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u\left(x\right)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } |x|\to\infty,\ \gamma=p+k,$$

$$u\left|_{\Gamma}=\varphi(\xi)\right.,\ \xi\in\Gamma,\ \varphi(\xi)\in C\left(\Gamma\right),$$

где $\rho_0^2=\sum\limits_{i=1}^{p-1}x_i^2+\frac{4}{(m+2)^2}x_p^{m+2}$.

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x)\in C_B^2\left(\Omega\right)\cap C^1\left(\Omega\cup\Gamma\right)\cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$L_B\left[u(x)\right]=0,\ x\in\Omega,$$

$$u(x)=o(1) \text{ при } x_p\to 0,$$

$$A\left[u\right]\left|_{\Gamma}=\psi(\xi)\right.,\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right),$$

где $A[\ ]=\xi_p^m\sum\limits_{j=1}^{p-1}\cos(n,\xi_j)\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\cos(n,\xi_p)\frac{\partial}{\partial\xi_p}$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к границе Γ.

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x)\in C_B^2\left(\Omega_e\right)\cap C^1\left(\Omega_e\cup\Gamma\right)\cap C\left(\overline{\Omega_e}\right),$$

$$L_B\left[u(x)\right]=0,\ x\in\Omega_e,$$

$$u(x)=o(1) \text{ при } x_p\to 0,$$

$$u\left(x\right)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } |x|\to\infty,$$

$$A\left[u\right]\left|_{\Gamma}=\psi(\xi)\right.,\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right).$$

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x;x_0)$ уравнения (2) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев

$$V(x)=\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\mathcal{E}(\xi;x)\xi_{p-1}^k d\Gamma,$$

$$W(x)=\int\limits_{\Gamma}\nu(\xi)A\left[\mathcal{E}(\xi;x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциалов на границе Γ области Ω.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда при* $\nu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \overline{W(x_0)},$$

$$W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \overline{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *при* $x \to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ*, а* $\overline{W(x_0)}$ *— прямое значение потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$*. Здесь* $x_0 \in \Gamma$ *— фиксированная точка границы* Γ*,* $\nu_0 = \nu(x_0)$*.*

Теорема 2. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i = \frac{\mu_0}{2} + \overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

$$A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

где $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i$ *и* $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e$ *— предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ*,* $\mu_0 = \mu(x_0)$*, а* $\overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.*

В §7 поставленные краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В §8 проводится исследование полученных интегральных уравнений, доказывается однозначная разрешимость поставленных задач.

Теорема 3. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 4. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 5. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 6. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Во *второй главе* доказывается существование единственного решения основных краевых задач для самосопряженного вырождающегося B–эллиптического уравнения (3).

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (3).

В §2 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора $E_{\alpha B}$.

В §3 дается интегральное представление решения уравнения (3).

В §4 изучаются некоторые свойства решений уравнения (3), в том числе доказывается теорема о принципе максимума.

В §5 даются постановки основных краевых задач для уравнения (3) и доказывается единственность их решений. Ставятся следующие краевые задачи.

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$E_{\alpha B}[u(x)] = 0,\ x \in \Omega,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u|_\Gamma = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega_e) \cap C\left(\overline{\Omega}_e\right),$$

$$E_{\alpha B}[u(x)] = 0,\ x \in \Omega_e,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \text{ при } |x| \to \infty,\ \gamma = p + k,$$

$$u|_\Gamma = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C(\Gamma),$$

где $\rho_0^2 = \sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} x_p^{2-\alpha}$.

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$E_{\alpha B}\left[u(x)\right]=0,\ x\in\Omega,$$

$$u(x)=o(1)\text{ при }x_p\to 0,$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma}=\psi(\xi)\ ,\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right),$$

где $A\left[\ \right]=\sum\limits_{j=1}^{p-1}\cos\left(n,\xi_j\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\xi_p^{\alpha}\cos\left(n,\xi_p\right)\frac{\partial}{\partial\xi_p}$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к границе Γ.

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x)\in C_B^2\left(\Omega_e\right)\cap C^1\left(\Omega_e\cup\Gamma\right)\cap C\left(\overline{\Omega_e}\right),$$

$$E_{\alpha B}\left[u(x)\right]=0,\ x\in\Omega_e,$$

$$u\left(x\right)=o\left(1\right)\text{ при }x_p\to 0,$$

$$u\left(x\right)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right)\text{ при }|x|\to\infty,$$

$$A\left[u\right]|_{\Gamma}=\psi(\xi)\ ,\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right).$$

В §6 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x;x_0)$ уравнения (3) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев

$$V\left(x\right)=\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\mathcal{E}(\xi;x)\xi_{p-1}^k d\Gamma,$$

$$W(x)=\int\limits_{\Gamma}\nu(\xi)A\left[\mathcal{E}(\xi;x_0)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциалов на границе Γ области Ω.

Теорема 7. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$ прямые углы. Тогда при $\nu\in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0)=-\frac{\nu_0}{2}+\overline{W(x_0)},$$

$$W_e(x_0)=\frac{\nu_0}{2}+\overline{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала $W(x)$ в точке $x_0\in\Gamma$ при $x\to x_0$ соответственно изнутри и извне границы Γ , а $\overline{W(x_0)}$ — прямое значение потенциала $W(x)$ в точке $x_0\in\Gamma$.

Теорема 8. *Пусть* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i = \frac{\mu_0}{2} + \overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

$$A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

где $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i$ *и* $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e$ *— предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$, $\overline{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]}$ *— прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.*

В §7 поставленные краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В §8 проводится исследование полученных интегральных уравнений, что приводит к следующим теоремам.

Теорема 9. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 10. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Терема 11. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, и при этом выполняется условие*

$$\int\limits_{\Gamma} \psi\left(\xi\right)\xi_{p-1}^{k} d\xi = 0,$$

то задача N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Терема 12. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_e *однозначно разрешима при любых граничных данных и решение можно представить в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) A\left[\mathcal{E}(\xi; x)\right]\xi_{p-1}^{k} d\Gamma + \frac{1}{\rho_0^{\gamma-2+2\beta}} \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi)\xi_{p-1}^{k} d\Gamma.$$

В *третьей главе* исследуются краевые задачи для вырождающегося B–эллиптического уравнения второго рода (4).

В §1 строится фундаментальное решение уравнения (4).

В §2 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора E_B, дается интегральное представление решения данного уравнения.

В §3 изучаются свойства решений уравнения (4), в том числе доказывается, что любое решение уравнения (4) в области Ω из $C_B^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ с граничными данными из $C_{m\gamma}(\Gamma)$ принадлежит к классу $C_{m\gamma}(\overline{\Omega})$, где $C_{m\gamma}(\ )$ – множество функций из класса $C(\ )$, удовлетворяющих условию

$$u(x) = O\left(x_p^{\frac{\gamma-2}{2}(m-2)+\frac{m}{2}}\right) \text{ при } x_p \to 0, \ \gamma = p + k.$$

В §4 даются постановки краевых задач для уравнения (4) и доказывается единственность их решений. Ставятся следующие краевые задачи.

Внутренняя задача DE **(Задача** DE_i**).** Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\,(x) \in C_B^2\,(\Omega) \cap C_{m\gamma}\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$E_B\,[u] = 0, \ x \in \Omega,$$

$$u|_\Gamma = f(\xi), \ f(\xi) \in C_{m\gamma}\,(\Gamma)\,.$$

Внешняя задача DE **(Задача** DE_e**).** Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\,(x) \in C_B^2\,(\Omega_e) \cap C_{m\gamma}\left(\overline{\Omega_e}\right),$$

$$E_B\,[u] = 0, \ x \in \Omega_e,$$

$$u = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{m}{2(m-2)}\right)}\right) \text{ при } \rho_0 \to \infty,$$

$$u|_\Gamma = f(\xi), \ f(\xi) \in C_{m\gamma}\,(\Gamma)\,,$$

где $\rho_0^2 = \sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i^2 + \frac{4}{(2-m)^2} x_p^{2-m}$.

Внутренняя задача NE **(Задача** NE_i**).** Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\,(x) \in C_B^2\,(\Omega) \cap C^1\,(\Omega \cup \Gamma) \cap C_{m\gamma}\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$E_B\,[u] = 0, \ x \in \Omega,$$

$$A_\xi[u]|_\Gamma = \varphi(\xi), \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma),$$

где $A_\xi[\ ] = \xi_p^{-m} \sum\limits_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к границе Γ.

Внешняя задача NE (Задача NE_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega_e) \cap C^1(\Omega_e \cup \Gamma) \cap C_{m\gamma}\left(\overline{\Omega_e}\right),$$

$$E_B[u] = 0,\ x \in \Omega_e,$$

$$u = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{m}{2(m-2)}\right)}\right) \text{ при } \rho_0 \to \infty \text{ и } x_p > 0,$$

$$A_\xi[u]|_\Gamma = \varphi(\xi), \xi \in \Gamma, \varphi(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma).$$

В §5 с помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x; x_0)$ уравнения (3) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев

$$V(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) \mathcal{E}(\xi; x) \xi_{p-1}^k d\Gamma,$$

$$W(x) = \int\limits_\Gamma \nu(\xi) A_\xi \left[\mathcal{E}(\xi; x)\right] \xi_{p-1}^k d\Gamma.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциалов на границе Γ области Ω.

Теорема 13. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с координатными гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда если $\nu(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$, то для потенциала двойного слоя справедливы предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{1}{2}\nu(x_0) + \overline{W(x_0)},$$

$$W_e(x_0) = \frac{1}{2}\nu(x_0) + \overline{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ при $x \to x_0$ соответственно изнутри и извне Γ, а $\overline{W(x_0)}$ — прямое значение потенциала $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 14. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда если плотность*

$\mu(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$, то для конормальной производной потенциала простого слоя справедливы предельные соотношения:

$$A_{x_0}[V(x_0)]_i = \frac{1}{2}\mu(x_0) + \overline{A_{x_0}[V(x_0)]},$$

$$A_{x_0}[V(x_0)]_e = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + \overline{A_{x_0}[V(x_0)]},$$

где $A_{x_0}[V(x_0)]_i$ и $A_{x_0}[V(x_0)]_e$ — предельные значения конормальной производной потенциала простого слоя в точке $x_0 \in \Gamma$ при $x \to x_0$ соответственно изнутри и извне Γ, а $\overline{A_{x_0}[V(x_0)]}$ — прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.

В §6 поставленные краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Исследование полученных интегральных уравнений приводит к следующим теоремам.

Теорема 15. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с координатными гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда для этой поверхности при $\varphi(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$ разрешима задача NE_e и ее решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 16. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с координатными гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда для этой поверхности при $f(x) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$ разрешима задача DE_i и ее решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 17. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с координатными гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда для этой поверхности при $f(x) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$ разрешима задача DE_e и ее решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 18. *Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с координатными гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда для этой поверхности при $\varphi(\xi) \in C_{m\gamma}(\Gamma)$ разрешима задача NE_i и решение может быть представлено в виде потенциала простого слоя.*

В *четвертой главе* рассматривается сингулярное B–эллиптическое уравнение (5).

В §1 строятся фундаментальные решения уравнения (5).

В §2 выводятся первая и вторая формулы Грина для оператора T_B. Даются интегральные представления решений уравнения (5).

В §3 изучаются некоторые свойства решений уравнения (5), в том числе доказываются теоремы о принципе максимума и локальном принципе экстремума.

В §4 даются постановки основных краевых задач для уравнения (5) и доказывается единственность их решений. Ставятся следующие краевые задачи.

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$T_B[u(x)] = 0,\ x \in \Omega,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u\,|_\Gamma = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega_e) \cap C\left(\overline{\Omega}_e\right),$$

$$T_B[u(x)] = 0,\ x \in \Omega_e,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\frac{\gamma-\alpha}{2}}\right) \text{ при } |x| \to \infty,\ \gamma = p + k,$$

$$u\,|_\Gamma = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \varphi(\xi) \in C(\Gamma),$$

где $\rho_0^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2$, n — внешняя нормаль к границе Γ.

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$T_B[u(x)] = 0,\ x \in \Omega,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_\Gamma = \psi(\xi),\ \xi \in \Gamma,\ \psi(\xi) \in C(\Gamma).$$

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2(\Omega_e) \cap C^1(\Omega_e \cup \Gamma) \cap C\left(\overline{\Omega_e}\right),$$

$$T_B[u(x)] = 0,\ x \in \Omega_e,$$

$$u(x) = o(1) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u\left(x\right) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\frac{\gamma-\alpha}{2}}\right) \text{ при } |x| \to \infty,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left|_{\Gamma} = \psi(\xi)\right., \ \xi \in \Gamma, \ \psi(\xi) \in C\left(\Gamma\right).$$

Внутренняя задача DE **(Задача** DE_i**).** Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$T_B\left[u(x)\right] = 0, \ x \in \Omega,$$

$$x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p} = o\left(1\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u\left|_{\Gamma} = \varphi(\xi)\right., \ \varphi(\xi) \in C\left(\Gamma\right).$$

Внешняя задача DE **(Задача** DE_e**).** Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_B^2\left(\Omega_e\right) \cap C\left(\overline{\Omega}_e\right),$$

$$T_B\left[u(x)\right] = 0, \ x \in \Omega_e,$$

$$x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p} = o\left(1\right) \text{ при } x_p \to 0,$$

$$u = o\left(1\right) \text{ при } |x| \to \infty,$$

$$u\left|_{\Gamma} = \varphi(\xi)\right., \ \varphi(\xi) \in C\left(\Gamma\right).$$

В §5 с помощью фундаментальных решений $\mathcal{E}(x;x_0)$ и $\mathcal{E}_1(x;x_0)$ уравнения (5) строятся поверхностные потенциалы простого и двойного слоев

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\mathcal{E}(\xi;x)\xi_{p-1}^k \xi_p^\alpha d\Gamma,$$

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}(\xi;x)}{\partial n}\xi_{p-1}^k \xi_p^\alpha d\Gamma,$$

$$W_1(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi)\frac{\partial \mathcal{E}_1(\xi;x)}{\partial n}\xi_{p-1}^k \xi_p^\alpha d\Gamma.$$

Изучаются свойства этих потенциалов и, в частности, доказываются теоремы о предельном значении потенциалов на границе Γ области Ω.

Теорема 19. *Пусть* Γ — *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда при* $\nu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \overline{W(x_0)},$$

$$W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \overline{W(x_0)},$$

где $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *при* $x \to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, *а* $\overline{W(x_0)}$ — *прямое значение потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 20. *Пусть* Γ- *поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\left(\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i = \frac{\mu_0}{2} + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}},$$

$$\left(\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e = -\frac{\mu_0}{2} + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}},$$

где $\left(\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i$ *и* $\left(\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e$ — *предельные значения производной потенциала простого слоя по нормали* n *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}}$ — *прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя.*

Теорема 21. *Пусть* Γ — *поверхность Ляпунова, образующая с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы. Тогда если* $\nu(\xi) \in C(\Gamma)$, *то для потенциала двойного слоя* $W_1(x)$ *справедливы следующие предельные соотношения:*

$$W_{1i}(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \overline{W_1(x_0)},\ W_{1e}(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \overline{W_1(x_0)},$$

где $W_{1i}(x_0)$ *и* $W_{1e}(x_0)$ *означают предельные значения потенциала* $W_1(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *при* $x \to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\overline{W_1(x_0)}$ – *прямое значение потенциала* $W_1(x)$ *в фиксированной точке* $x_0 \in \Gamma$, $\nu_0 = \nu(x_0)$.

В §6 поставленные краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В §7 проводится исследование полученных интегральных уравнений, доказывается однозначная разрешимость поставленных краевых задач.

Теорема 22. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 23. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Терема 24. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, и при этом выполняется условие*

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(\xi)\, \xi_{p-1}^{k} \xi_p^{\alpha} d\xi = 0,$$

то задача N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Терема 25. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* D_e *однозначно разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) \frac{\partial \mathcal{E}(\xi; x)}{\partial n} \xi_{p-1}^{k} \xi_p^{\alpha} d\Gamma + \frac{1}{\rho_0^{\gamma-\alpha}} \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi) \xi_{p-1}^{k} \xi_p^{\alpha} d\Gamma.$$

Терема 26. *Если* Γ *— поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1} = 0$ *и* $x_p = 0$ *прямые углы, то задача* DE_i *для поверхности* Γ *разрешима при* $\varphi(x) \in C(\Gamma)$ *и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, заслуженному деятелю науки РТ Ф.Г. Мухлисову за помощь и советы, которые он оказывал мне в период написания данной работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Чеботарева Э.В. Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Труды 2-го международного форума молодых ученых "Актуальные проблемы современной науки". — Самара.: СамГТУ, 2006. — С. 107–111.

2. Чеботарева Э.В. Решение краевых задач для многомерного вырождающегося B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Вестник Татарского государственного гуманитарно–педагогического университета. — Казань, 2007. №2–3. — С. 9–14.

3. Чеботарева Э.В. О краевых задачах для вырождающегося B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского (материалы международной научной конференции). — Казань, 2007. Т. 35. — С. 265–267.

4. Чеботарева Э.В. Решение краевых задач для вырождающегося B–эллиптического уравнения второго рода методом потенциалов. / Э.В. Чеботарева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико–математические науки". — Самара: СамГТУ, 2008. №2(17) — С. 38–48.

5. Чеботарева Э.В. Решение краевых задач для многомерного вырождающегося B–эллиптического уравнения методом потенциалов. / Ф.Г. Мухлисов, Э.В. Чеботарева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Математическая". — Самара: СамГТУ, 2008. №2(8) — С. 89–107.

6. Чеботарева Э.В. Интегральное представление решения B–эллиптического уравнения с сильным характеристическим вырождением. / Э.В. Чеботарева // Вестник Татарского государственного гуманитарно–педагогического университета. — Казань, 2008. №4(15). — С. 47–52.

7. Чеботарева Э.В. Фундаментальное решение одного вырождающегося сингулярного B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Труды шестой Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи". — Самара: СамГТУ, 2009. Ч.3. — С.234–237.

8. Чеботарева Э.В. Краевые задачи для одного вырождающегося сингулярного B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского (материалы международной научной конференции). — Казань, 2009. Т. 38. — С. 299–300.

9. Чеботарева Э.В. Интегральное представление и свойства решений одного сингулярного B–эллиптического уравнения. / Э.В. Чеботарева // Материалы Второй Всероссийской конференции, посвященной памяти В.Ф. Волкодавова. — Самара: ПГСГА, 2009. С.79-82.

10. Чеботарева Э.В. Исследование краевых задач для сингулярного B–эллиптического уравнения методом потенциалов. / Э.В. Чеботарева // Известия вузов. Математика. — Казань, 2010. №5.— С. 88–90.

11. Чеботарева Э.В. Решение задачи N для одного сингулярного B-эллиптического уравнения методом потенциалов. / Э.В. Чеботарева // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. — Тула: Издательство ТулГУ, 2010. Вып. 1. — С. 54–63.